5-10-2018

Ο πίνακας Α διάστασης $m\times n$ (δηλαδή m γραμμές και n στήλες είναι μια ορθογώνια τοποθέτηση $m\times n$ στοιχείων (συνήθως αυτά είναι πραγματικοί αριθμοί). Συμβολίζουμε
$A_{m\times n} = (a_{ij})$

π.χ. $A_{3\times 3} = (i\cdot j)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$B_{2\times 3} = \left((-1)^{ij}(i+j)\right)$ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$C_{3\times 2} = \left(\sum_{t=i}^{i+j} t^2\right)$ $\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ & \\ & 50 \end{pmatrix}$

$C_{11} = \sum_{t=1}^{2} t^2 = \underset{t=1}{1} + \underset{t=2}{4} = 5$

$C_{12} = \sum_{t=1}^{3} t^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$C_{32} = \sum_{t=3}^{5} t^2 = 9 + 16 + 25 = 50$

$M(m\times n, \mathbb{R}) = \{$όλοι τους $m\times n$ πίνακες με στοιχεία πραγματικούς$\}$

$m=1$ $M(1\times n, \mathbb{R}) = \{$όλοι τους $1\times n$ πίνακες με στοιχ. πραγμ.

πίνακες γραμμής

$n=3 \quad (1, \sqrt{2}, -7) \in \mathbb{R}^3$

$\{1,2\} \neq (1,2)$ - σειρά

σύνολο   n-άδα   η n-άδα είναι διατεταγμένη

$(1,2) \neq (2,1)$

$\{1,2\} = \{2,1\}$.

Δύο πίνακες A, B ίδιας διάστασης καλούνται ίσοι, αν τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα. $\alpha_{ij} = b_{ij}$.

$1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n$

• Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται συμμετρικός αν $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα i, j

$$\begin{pmatrix} \boxed{\alpha_{11}} & \boxed{\alpha_{12}} & \boxed{\alpha_{13}} \\ \boxed{\alpha_{21}} & \alpha_{22} & \boxed{\alpha_{23}} \\ \boxed{\alpha_{31}} & \boxed{\alpha_{32}} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

• Ο ανάστροφος ενός πίνακα $A_{n\times m}$ συμβολίζεται με $A^t_{n\times m}$ και δίνεται από το c_{ij} στοιχείο του ανάστροφου να είναι το α_{ji} στοιχείο του A.

π.χ. $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A^t_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Πρόταση. Ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν $A = A^t$

$$A_{m\times n} = A^t_{n\times m} \Rightarrow n=m \text{ τετραγ.}$$

$A=(a_{ij})$
$A^t=(c_{ij})$ με $c_{ij}=a_{ji}$
$A=A^t \Leftrightarrow a_{ij}=c_{ij}=a_{ji} \Leftrightarrow$ A συμμετρικός

· Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται άνω τριγωνικός αν ισχύει $a_{ij}=0$ για $i>j$
· Αντίστοιχα κάτω τριγωνικός αν ισχύει $a_{ij}=0$ για $i<j$

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt[3]{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{7} & 6 & 0 \\ -\sqrt{3} & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Το άθροισμα δύο πινάκων A και B ίδιας διάστασης ορίζεται ως ο πίνακας C ίδιας διάστασης με $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$
$C = A+B$

Ιδιότητες αθροίσματος

α) $A+B=B+A$ αντιμεταθετική
β) $(A+B)+C = A+(B+C)$ προσεταιριστική $\oplus$
γ) $A_{m\times n}+O_{m\times n}=A_{m\times n}=O_{m\times n}+A_{m\times n}$

Στο σύνολο των πινάκων ορίσαμε μια πράξη πρόσθεσης πινάκων.

Scanned by CamScanner

Η πράξη της + ικανοποιεί τις ⊕ ιδιότητες.

Ορίζουμε το σημειακό - βαθμωτό γινόμενο με πράξη μεταξύ αριθμού και πίνακα.

$\odot \quad \mathbb{R} \times M(m\times n, \mathbb{R}) \to M(m\times n, \mathbb{R})$

$\quad (c, A=(a_{ij})) \mapsto c\odot A = C = (c_{ij})$

π.χ. $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

Ο αντίθετος του πίνακα A είναι ο $(-1)\odot A$ και συμβολίζεται με $-A$, $-A = (-a_{ij})$ με $A = (a_{ij})$

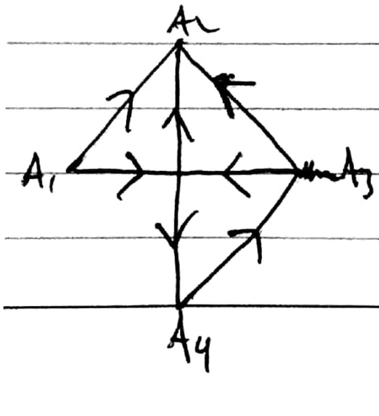
Ιδιότητες του σημειακού γινομένου.

$1\odot A = A$ $\quad \cancel{c\odot(A+B) = c\odot A + c}$

$(c_1+c_2)\odot A = c_1\odot A + c_2\odot A$

$(c_1\cdot c_2)\odot A = c_1\odot(c_2\odot A)$

$A + (-A) = O_{m\times n}$



Γράφος - Graph
κατευθυνόμενος

Πίνακας Γειτνίασης $M_{4\times4} = (m_{ij})$ $m_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \text{ ή όταν δεν υπάρχει σύνδεση από την κορυφή } i \text{ στη } j \\ 1 & \text{όταν υπάρχει σύνδεση} \end{cases}$

$$M_{4\times4} = \text{Από} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M^2 = M \cdot M = \{$ δίνει το πλήθος των συνδέσεων με έναν ενδιάμεσο σταθμό $\}$

$A_1 \to A_4 \quad \underline{a_{11}} \cdot a_{14} + \underline{a_{12}} \cdot a_{24} + \underline{a_{13}} \cdot a_{34} + \underline{a_{14}} \cdot a_{44}$

- όλη την 1η γραμμή

o όλη την 4_η στήλη.

Ορίζεται το γινόμενο μεταξύ $m\times n$ και $n\times k$ πίνακα να δίνεται από πίνακα $m\times k$ ως εξής:

$A_{m\times n} = (a_{ij})$

$B_{n\times k} = (b_{ij})$

$A \cdot B = C = (C_{ij})$

$C_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} + b_{tj}$

Δηλαδή πολ/μου τα αντίστοιχα στοιχεία της i-γραμμής του A με την j-στήλη του B και τα προσθέτουμε.

π.χ.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4 \\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$AB \neq B\cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2+2 & 1\cdot6+2\cdot(-3) \\ 8-8 & (-4)6+3\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A\cdot B = O_{m\times n} \not\Rightarrow A=0$ ή $B=0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{4}(-8) & -1\cdot(\frac{1}{4})+\frac{1}{4}\cdot2 \\ -8\cdot-1+2\cdot(-8) & -8\cdot\frac{1}{4}+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x=0$ ή $x=1$

Ιδιότητες

Προσεταιριστική $\underset{m\times n}{(A\cdot B)}\cdot \underset{n\times e}{\ } \underset{e\times p}{C} = A(B\cdot C)$

Επιμεριστική $A(B+C) = AB+AC$

$(A+B)C = AC+BC$

Scanned by CamScanner

Ταυτοτικό Μοναδιαίος. $A_{m\times n} I_{n\times n} = A_{m\times n}$

$I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

Σημειακό γινόμενο $c\circ(AB) = (c\circ A)B = A(c\circ B)$

$I_{m\times m} = (b_{ij}) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$A_{m\times n} = (\alpha_{ij})$

$I_{m\times m} A_{m\times n} = C_{m\times n} = (c_{ij}) = A_{m\times n}$

$c_{ij} = \sum_{t=i}^{m} b_{it}\alpha_{tj} \rightarrow \begin{cases} i=t & b_{it}=1 \\ i\neq t & b_{it}=0 \end{cases} = b_{ij}\alpha_{ij} = 1\cdot\alpha_{ij} = \alpha_{ij}$

$A\cdot B = D_{(m\times e)} = (d_{ij})$

$(A\cdot B)C = D\cdot C = E_{(m\times p)} = (e_{ij})$

$B\cdot C = H_{(n\times p)} = (h_{ij})$

$A(BC) = AH = K_{(m\times p)} = (k_{ij})$

Θέλουμε $D\cdot C = A\cdot H \Leftrightarrow E = K$

$e_{ij} = \sum_{t=1}^{e} d_{it} + c_{tj}$

$d_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\cdot b_{sj} = \sum_{t=1}^{e}\left(\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} b_{st}\right)c_{tj} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} h_{sj} = k_{ij}$

Scanned by CamScanner